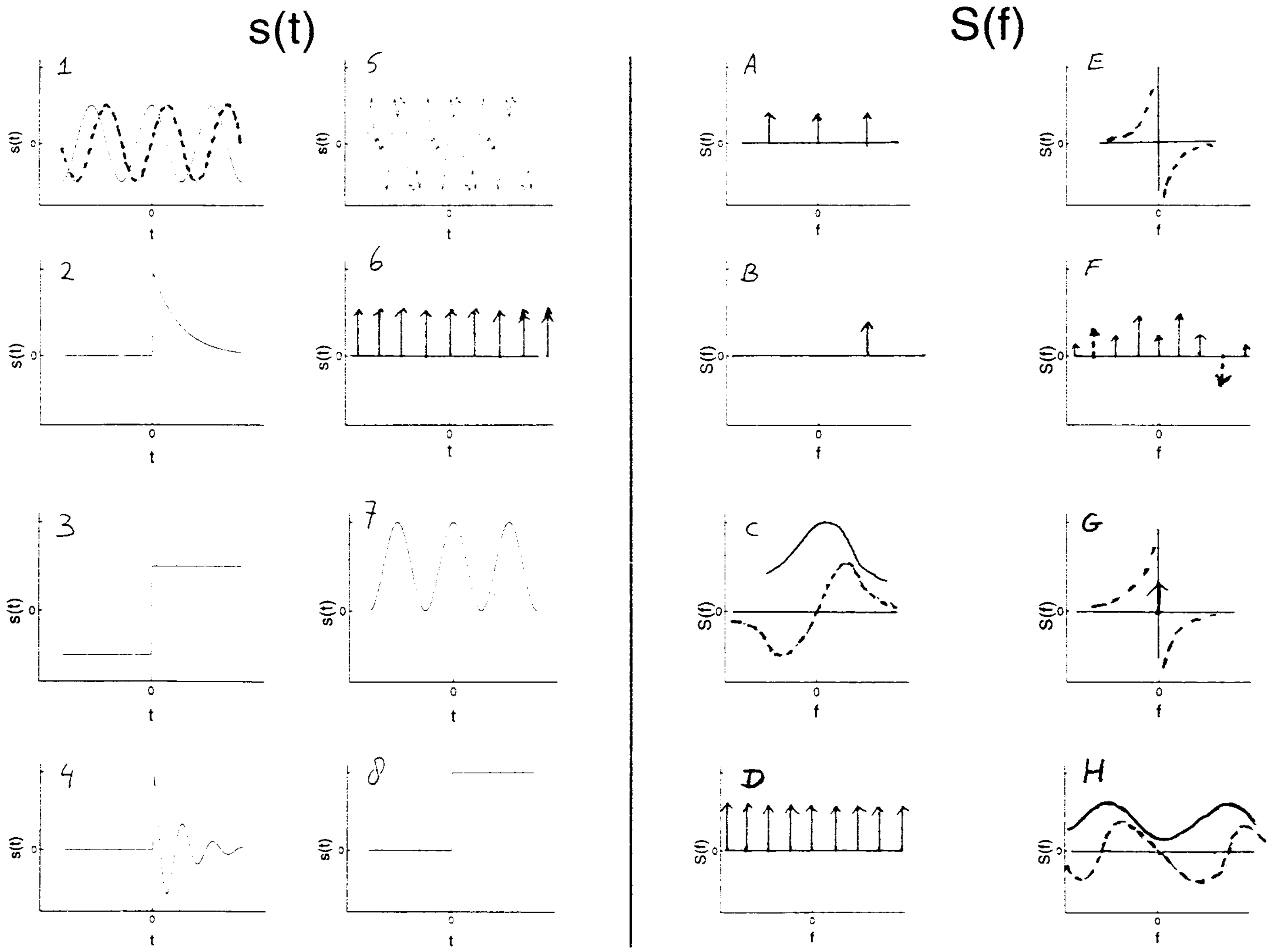
Tentamen Signaalanalyse 18 november 1997 14.00-17.00 u

Gebruik voor de beantwoording van de onderstaande ***4 vraagstukken*** *antwoordvellen met daarop:*
1) je naam , 2) het betreffende vraag- en onderdeelnummer.
Zet op het eerste antwoordvel het totaal aantal ingeleverde vellen.

vraag 1:

a) Beschrijf kort (in een enkele zinnen) wat de tijdswinst is in het gebruik van een "fast-concolution" in vergelijking met de "gewone" discrete convolutie. In de beschrijving kan gerefereerd worden naar de tijdswinst behaald met een Fast Fourier Transform in vergelijking tot de Discrete Fourier Transform.

b) Hieronder staan links 8 verschillende tijdsignalen, *s(t)*. De bijbehorende 8 Fourier-Transforms staan rechts in een random volgorde. Getrokken lijnen stellen reele functiewaarden voor, onderbroken lijnen stellen imaginaire functiewaarden voor. Geef m.b.v. een cijfer-letter combinatie aan welke Fourier-Transform bij welk signaal hoort.



vraag 2:

Beschouw het lineaire discrete filter waarvan de waarde op de uitgang, w_n, op tijdstip nT wordt gegeven door:

$$w_n = aw_{n-1} + s_{n-1},$$

waarbij s_n het discrete ingangssignaal op tijdstip nT is.

a) Geef een schema van een mogelijke realizatie van dit filter m.b.v. een electrisch circuit en geef een nadere typering van dit filter.

b) Laat zien dat voor het kwadraat van de norm van de overdrachtsfuctie, $|\hat{H}(f)|^2$, van dit filter geldt:
$$|\hat{H}(f)|^2 = \frac{1}{1 + a^2 - 2a\cos 2\pi fT}$$

c) Schets $|\hat{H}(f)|^2$ voor a = 0.5 en -0.5 met de frequentie-as lopend van $-1/T$ tot $1/T$.

Stel nu dat het filter wordt aangestuurd met een tijdsreeks g_n, bestaande uit N (>> 1) punten die een onafhankelijke witte ruis representeren met $\overline{g}_n = 0$ en variantie $\sigma_g^2 = K$.
Maak dan een schets, met daarin schematisch aangegeven de vorm en variantie van het power-spectrum van deze gefilterde reeks, voor frequenties van *0* tot $\frac{1}{2T}$, als die:

d) met behulp van een periodogram van de hele reeks g_n wordt geschat.

e) met behulp van een gemiddeld periodogram van de in vier gelijke tijdperioden verdeelde tijdsreeks g_n wordt geschat.

f) Gegeven dat de correlatiefunctie van het gefilterde Gausische signaal wordt gegeven door:
$$R_w(k) = \frac{a^{|k|}}{1-a^2} R_s(0),$$ wat volgt dan daaruit over de Fourier Transform van $a^{|k|}$?

vraag 3:

Een signaal, *s(t),* bestaat uit twee sinusvormige componenten volgens:

$$s(t) = a_0 \cos(2\pi f_1 t) + b_0 \sin(2\pi f_2 t) \qquad f_2 > f_1$$

a) Geef een expliciete uitdrukking voor de Fourier Transform van *s(t).*

Neem aan dat $f_2 = 2 \cdot f_1$ en dat het signaal *s(t)* gedurende 16 perioden van f_2 (dus $T = \frac{16}{f_2}$) wordt bemeten.

b) Geef een expliciete uitdrukking voor de Fourier Transform van dit <u>beperkt</u> ($T = \frac{16}{f_2}$) bemeten signaal.

Het gedurende tijd T bemeten signaal wordt nu bemonsterd met een vaste sample-frequentie, f_s, die wordt gekozen als een veelvoud van f_2. Dus: $f_s = n \cdot f_2$.

c) Leg uit waarom dergelijk gekozen sample-frequenties adequaat zijn voor bemonstering van *s(t)*.

Neem nu aan dat $n = 4$ (dus $f_s = 4 \cdot f_2$) en dat vervolgens van de resulterende bemonsterde tijdsreeks een FFT wordt berekend.

d) Hoeveel frequentie-componenten levert deze FFT, wat is de frequentieresolutie (Δf) van de FFT en welke componenten van de FFT corresponderen met f_1 en f_2?

e) Leg uit waarom geen tijdsvenster nodig is voor de bepaling van het spektrum van *s(t)* uit het beperkte stuk signaal m.b.v. een FFT zoals in onderdeel d).

f) Wat gebeurt er met de componenten van de FFT die corresponderen met f_1 en f_2 als de bemonsterde tijdsreeks eerst met een driehoeksvenster (Bartlett venster) wordt vermenigvuldigd. Licht het antwoord toe met een schets van de amplitude van de FFT componenten die dan worden verkregen.

g) Bespreek de noodzaak tot het toepassen van een venster op de beperkte tijdsreeks voordat een FFT wordt berekend voor de bepaling van het spektrum van *s(t)*, als $f_2 = 1.3 \cdot f_1$

Gegeven:
De Fourier-Transform van een rechthoekige puls die symmetrisch rond t=0 ligt, met duur T en amplitude A is: $AT\mathrm{sinc}(\pi fT)$.
De Fourier-Transform van een driehoekspuls die symmetrisch rond t=0 ligt, met duur T en amplitude A is: $\frac{AT}{2}\mathrm{sinc}^2(\frac{\pi fT}{2})$.

<u>vraag 4:</u>

a) Geef, uitgaande van de onderstaande definitie van de variantie, σ^2, van een signaal, *s(t)*:

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} p(s)\,(s-\bar{s})^2\, ds ,$$

een uitdrukking van σ^2 in termen van eerste- en tweede moment van *s(t)*.
(In de definitie stelt *p(s)* de kansdichtheidsfunctie van *s(t)* voor en $\bar{s}$ het ensemble gemiddelde van *s(t)*.)

b) Stel vanaf nu dat *s(t)* een ergodisch random signaal is met tijdsgemiddelde μ, volgens: $s(t) = \mu + r(t)$, waarbij *r(t)* een ergodisch random signaal is met tijdsgemiddelde gelijk aan nul. Leid af hoe de autocorrelatiefunctie van *s(t)*, $R_s(t)$, samenhangt met de autocorrelatiefunctie van *r(t)*, $R_r(t)$.

c) Maak plausibel waarom geldt: $R_r(\infty) = 0$.

d) Leid vervolgens m.b.v. de voorgaande onderdelen af dat voor de variantie, σ^2, van signaal *s(t)* geldt: $\sigma^2 = R_s(o) - R_s(\infty)$.